e-orthophonie
84 rue du 11 Novembre, 42210 l'HOPITAL LE GRAND
Tél. : 04.77.37.79.98
Site internet : www.e-orthophonie.fr

e-orthophonie*

Préparation en ligne au concours d'orthophonie

Maîtrise des notions :	1	2	3	4	5	6
	TB	TB	TB	TB	TB	TB
	B	B	B	B	B	B
	M	M	M	M	M	M
	A revoir	A revoir	A revoir	A revoir	A revoir	A revoir

Restitution des notions :	1	2	3	4	5	6
	TB	TB	TB	TB	TB	TB
	B	B	B	B	B	B
	M	M	M	M	M	M
	A revoir	A revoir	A revoir	A revoir	A revoir	A revoir

Vitesse, temps, distance-croisement

Voici l'énoncé: "Un train part d'Auxerre à 10h et roule à la vitesse de 200 km/h. A la même heure, un train part de Marseille et roule à 300 km/h. A quelle distance de Marseille les trans se croisent-ils sachant que les deux villes sont éloignées de 700 km ?"

Je souhaiterais comprendre comment résoudre ce problème en passant par un tableau VTD, car j'arrive à le résoudre en passant par le système du barycentre mais je voudrais juste comprendre l'autre manière de faire.

Je vous propose une résolution algébrique.
Vous posez:
Soit x le temps (en h) de parcours jusqu'à la rencontre.
Vous exprimez alors les distances parcourues par chacun des 2 trains jusqu'à la rencontre.
Vous mettez le tout en équation.
Vous posez l'équation et la résolvez.
Bon travail !

Voici une autre façon de résoudre ce problème.
Le train qui part de Marseille roule [a] fois plus vite que le train qui part d'Auxerre. (A vous de trouver la valeur de [a]). Donc le train qui part de Marseille parcourt [a] fois plus de distance que celui qui part d' Auxerre pour une même durée.
Lorsque ces deux trains se rencontrent , quelle distance ont-ils parcouru à eux deux ?
Bon courage.

En fait j'ai reussi en me basant sur le rapport de distance, puisque quand le train d'auxerre fait 200, l'autre en fait 300, soit 700/5 ce qui me donne 140x 3, donc ils se rencontrent a 420km de Marseille.

Mais est-ce possible de résoudre cette opération en se basant sur la formule T= D/V ?
car j'arrive alors en utilisant un tableau vtd a : (700- D marseille)/200 = D marseille/300
mais je ne comprends pas comment la résoudre.

Bonjour :bravo!Tu as résolue le problème en suivant les conseile de Mr Steve.A propos de ta question : "Mais est-ce possible de résoudre cette opération en se basant sur la formule T= D/V ?" .
Etant donné que les deux trains ,avec deux vitesses différentes parcoureront évidemment des distances différentes mais dans la même durée (le meme temps) .Cela veut dire mathématiquement que les distances parcourues d_1 et d_2 sont respectivement proportionnelles aux vitesses v_1 et v_2 .d'ou : d_1 / v_1 = d_2 / v_2 .soit d_1 / 200 = d_2 / 300
d_1 / 200 = d_2 / 300= (d_1 + d_2) / (200+300) = 700 / 500 = 1,4 (ce n'est autre que le a que Steve t'a demandé de trouver) .(coefficient de proportionnalité) .De ses rapports , tu en déduis le calcul de d_1 =280 km et d_2 =420 km .

Enigme sur les trains

1)Un train part de Lille vers Besançon (508 km) à 2h45 du matin, à une vitesse moyenne de 148 km à l'heure. Un deuxième train partant de Besançon à 3h05, se dirige vers Lille, à une vitesse inconnue. Quel est le train le plus près de Lille au moment du croisement ?

2)Qu'arrive-t-il si un boulet de canon irrésistible (c'est à dire "qui renverse tout sur son passage") cogne un poteau inébranlable (que rien ne peut renverser)?

[edit]: j'ai modifié un peu la question 1, pour une meilleure comprehension, en remplaçant Paris par Lille (enfin c'est surtout parceque je m'étais un peu trompé au départ) Et je tiens aussi à préciser à certains joueurs que je ne prends aucunes substances illicites (juste un petit rail de fraises tagada tous les matins por se mettre en forme^^).

1) Aucun, les deux sont au même endroit.
2) Impossible, il y a contradiction entre les deux termes.

Encore 1 énigme et un paradoxe tres connu(e)s:

1) ca depend de la definition de "se croiser" et "le plus pres"
Si par exemple on defini un croisement par le moment ou l'avant des 2 train se croisent, mais on defini leur proximité par la distance entre le milieu du train et le milieu de la ville... alors c'est celui qui en part qui est le plus proche....
Si dans les 2 cas on prend soit le milieu soit l'avant, soit l'arriere, la solution est evidement que les 2 sont a la meme distance....

2) Ce paradoxe n'existe que dans l'abstrait. En realité la matiere est formée de 99% de vide, et donc un objet inébranlable n'existe pas, au pire, 2 objets poussés l'un contre l'autre vont fusionner. Egalement pour qu'une force soit irresistible, elle doit être inifinie.

1) Ils seraient pas un peu au même endroit quand ils se croisent?
2) Un choc.

Pour la question 1, bonnes réponses de Taupine , EmmaLI , viviscrat, FRiZMOUT, dhrm77, papiauche et HAMEL.

-Pour la question 2, bravo à EmmaLI, FRiZMOUT et dhrm77 pour avoir vu la petite subtilité

Le TGV "Nord" part de Lille à 10 H 20 vers Paris à la vitesse de 227km/h et le TGV "Sud" part de Paris à 10H 30 vers Lille à la vitesse de 239 km/h. La distance Lille-Paris est environ de 220km par le train. Ces deux trains vont-ils se croiser avant 10H53 ?

Non il ne vont pas se croisé parce-que de 227km/h a239km/h il y a 12km qui les séparent donc il faut faire les 30min + les 20min=50min+12km=52 donc il ne vont pas se croisés

Le nombre 10718/60 est plus petit que 1093/6. Mais pourriez-vous expliquer un peu plus la 2e partie car je n'ai pas tous compris. Merci !

Un gars en mobylette est dans la forêt, il est à sa vitesse maximale de 40km/h. Il avise qu'un feu le poursuit par derrière à 60 km/h. Il sera vite rattrapé et cuit! Que faire?

Il descend de mobylette et allume un feu devant lui.

Bonne astuce, même si peu écologique: faire un feu en avant pour ne pas être rattrapé par le feu en arrière.

En effet, le feu va partir devant lui à 60km/h et lui laissera la possibilité de passer tranquillement sur les zones brûlées, tandis que le feu arrière va stopper net lorsqu'il va atteindre la zone déjà brûlée par le feu allumé par le mec en mob.

Train-train

Problème

Une gare dont le quai est long de 500 mètres.

Un train long de 1 kilomètre file à 60 km/h.

Combien de temps mettra-t-il à traverser le quai?

....

....

....

....

....

....

Solution

Dès l'annonce des données, je réalise que le train parcourt 60 km en 1 h, soit, en divisant tout par 60, 1 km en 1 minute.

Plusieurs étapes:

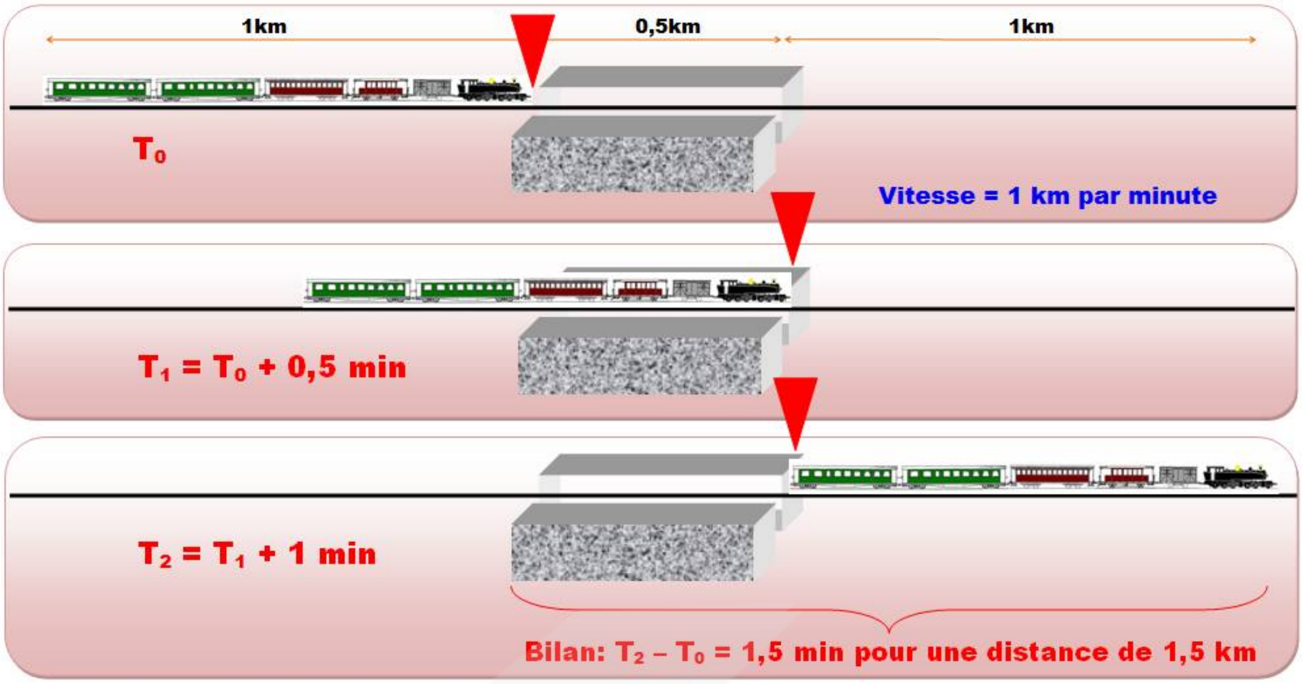
T_0 : l'avant du train est en face du début du quai;

T_1 : l'avant du train est en face de la fin du quai. L'avant a avancé de la longueur du quai soit un demi-kilomètre. Il a mis une demi-minute pour le faire.
L'arrière du train est à 1km en arrière (normal, c'est la longueur du train).

T_2 : l'arrière du train arrive en face de la fin du quai après une minute.

Bilan

Pour passer la tête puis la queue devant le quai, le train mettra 1,5 minute.



Le viaduc ferroviaire est visible de l'autoroute. Sa longueur est estimée à 3 km. Le TGV débouche à 320 km/h. Son double attelage l'amène à une longueur de 400 m. Pendant combien de temps le train sera-t-il en visibilité sur le pont ?

....

....

....

....

....

....

....

....

Longueur du viaduc + longueur du train: 3,4 km
Vitesse du train: 60 minutes pour 320 km
Temps de parcours: X minutes pour 3,4 km
Règle de trois (ou produit en croix ou quatrième proportionnelle)

$$X = \frac{60 \times 3,4}{320} = 0,6375 \text{ minutes} = 38,25 \text{ secondes}$$

On fait toujours un calcul de tête pour **vérifier** l'ordre de grandeur. Si le train allait à 360km/h, ce serait 6 km en une minute. Pour les 3km du viaduc, nous aurions 0,5 minute. Oui, avec 0,6 min l'ordre de grandeur est respecté.

L'un va à la rencontre de l'autre à 120 km/h pour l'un et à 140km/h pour l'autre. Quelle distance les séparent une demi-heure avant qu'ils se croisent?
En fait, à partir de ce moment là, il leur restera une demi-heure de parcours à chacun pour arriver à leur croisement; soit 60 km pour l'un et 70 km pour l'autre; au total: 60 + 70 = 130 km.

Problème

Deux trains partent de deux gares éloignées.

Ils roulent chacun à une vitesse constante en direction l'un de l'autre.

Quand vont-ils se rejoindre ?

....

....

....

....

....

....

Comme exemple numérique, on prendra:

Vitesse des deux trains: 75 et 25 km/h, et

Distance entre les deux gares 200 km.

Résolution directe
Remarquons que lorsque les deux trains se rencontrent.

Ils ont, à eux deux, parcouru toute la distance entre les deux gares.	**200 km**
C'est un peu comme s'ils avaient ajouté leur vitesse pour exécuter plus vite ce parcours.	**75 + 25 = 100 km/h**
Dans ces conditions, pour faite ce trajet complet, il leur a fallu:	**200 / 100 = 2 heures**

Le premier a parcouru:	**2 x 75 = 150 km**
Le second lui a fait:	**2 x 25 = 50 km**

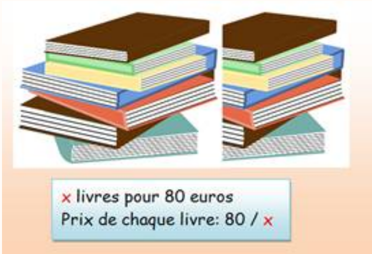
Résolution algébrique **

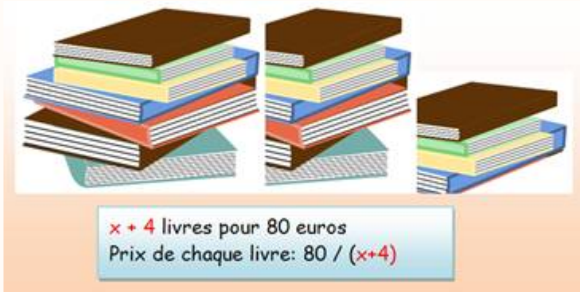
Nous utiliserons la formule et le diagramme de temps donnés en rappel ci-dessus.

Exprimons la distance parcourue par le train 1 et par le train 2. D étant la distance entre les deux gares.	$l_1 = v_1 . t_1$ $l_2 = D - v_2 . t_2$
Au moment de la rencontre, les trains sont à la même distance au même moment.	$l_1 = l_2 = l$ $t_1 = t_2 = t$
En remplaçant:	$l = v_1 . t$ $l = D - v_2 . t$
L'égalité en l permet de calculer t.	$v_1 . t = D - v_2 . t$
En exprimant par rapport à t.	$t = \frac{D}{V_1 + V_2}$
Application numérique	$t = \frac{D}{v_1 + v_2}$ $= \frac{200}{75 + 25}$ $=$ **2 heures** $l = v_1 . t$ $= 75 \times 2 = 150$ **km**

Problème
Le libraire achète des livres pour 80 €.
Avec 4 livres de plus, pour le même prix total, chaque livre aurait coûté 1€ de moins.

Illustration





Solution

	Réalité	Supposition
La quantité de livres:	**x**	**x + 4**
Coût de chaque livre:	**80 / x**	**80 / (x + 4)**
Traduction de l'énoncé Les coûts diffèrent de 1 euro:	**80 / x =**	**1 + 80 / (x + 4)**
Expression et mise en dénominateur commun.	$\frac{80}{x} = 1 + \frac{80}{x+4}$ $\frac{80}{x} - \frac{80}{x+4} = 1$ $\frac{80(x+4)}{x(x+4)} - \frac{80x}{x(x+4)} = 1$	
Calcul avec produits en croix.	**80 (x + 4) – 80x = x (x + 4)** **80x + 320 – 80x = x^2 + 4x** **320 = x^2 + 4x** **x^2 + 4x – 320 = 0**	
Discriminant:	**b^2 – 4ac** **= 16 – 4 . 1 . (–320)** **= 16 + 1 280** **= 1296** **= 36^2**	
Racines: La solution négative est à rejeter.	**x_1 = (–4 + 36) / 2 = 16** **x_2 = (–4 – 36) / 2 = –20**	
Nombre de livres et Prix de chaque livre:	**16 livres à 80/16 = 5 €** En effet: **16 x 5 = 80** **20 x 4 = 80**	

Âge du père et âge du fils

Problème

Il y a tout juste 1 an, un homme avait 8 fois l'âge de son fils.
Aujourd'hui son âge est le carré de celui de son fils.
Trouvez son âge.

Solution

	Il y a un an	**Aujourd'hui**
Âge du fils:	**x**	**$x + 1$**
Âge du père:	**$8x$**	**$8x + 1$**
Traduction de l'énoncé:	(âge fils)² = âge du père, aujourd'hui **$(x + 1)^2 = 8x + 1$** **$x^2 + 2x + 1 = 8x + 1$** **$x^2 - 6x = 0$** **$x(x - 6) = 0$**	
Racines: La solution nulle est à rejeter.	**$x_1 = 0$** **$x_2 = 6$**	
Âge du fils et Âge du père:	$6 + 1 = 7$ ans **$8 \times 6 + 1 = 49$ ans**	

Âge de Clément

Problème

Le produit de l'âge de Clément dans 10 ans par celui qu'il avait il y a 10 ans est égal à 44.
Quel est l'âge de Clément ?

Solution

	Il y a 10 ans	Dans 10 ans
Âge de Clément:	x	$x + 20$
Traduction de l'énoncé:	$x(x + 20) = 44$ $x^2 + 20x - 44 = 0$	
Calcul (factorisation):	$x^2 + 22x - 2x - 44 = 0$ $x(x + 22) - 2(x + 22) = 0$ $(x - 2)(x + 22) = 0$	
Racines: La solution négative est à rejeter.	$x_1 = 2$ $x_2 = -22$	
Âge de Clément il y a 10 ans et âge actuel:	**2 ans** **2 + 10 = 12 ans**	

C'est l'enfant de votre père et de votre mère mais ce n'est ni votre frère ni votre sœur. Qui est-ce ?

....

....

....

- C'est moi, bien sûr!

IL y a deux pères et deux fils et pourtant ils ne sont que trois. Pourquoi? Tout simplement parce qu'il y a le grand-père, le père et le fils.

Trois russes ont un frère. Le frère meurt sans laisser de frère. Comment est-ce possible?
Les trois russes sont trois sœurs.

Chéri, devine mon âge

- Il sait que sa nouvelle fiancée aime les bijoux. Il lui offre un collier de perles. Autant de perles que ses 35 printemps.
- Chéri, dit-elle, quelle preuve d'amour! Aussi je ne peux pas te mentir plus longtemps. Ajoute donc dix perles au collier …

Bévue!

- Quel âge avez-vous?
- L'actrice répond: l'âge que je parais.
- Ah, je vous croyais plus jeune!

Père et grand-père

Combien y a-t-il de pères dans un jeu de sept familles ? Non pas 7, mais 14, car les grands-pères sont aussi des pères. Même chose pour les mères, bien entendu.

Question

- Je cherche à savoir quand mon fils aura la moitié de mon âge.

....

....

....

....

Solution

- Cela se passe lorsque mon fils à l'âge que j'avais moi-même à sa naissance.

Moi	**Mon fils**
30 ans	Naissance
60 ans	30 ans = 60 / 2

Question

- Un enfant de 12 ans demande son âge à son cousin qui lui répond:

Quand tu auras l'âge que j'ai, j'aurai deux fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as.
Quel est l'âge du cousin ?

....

....

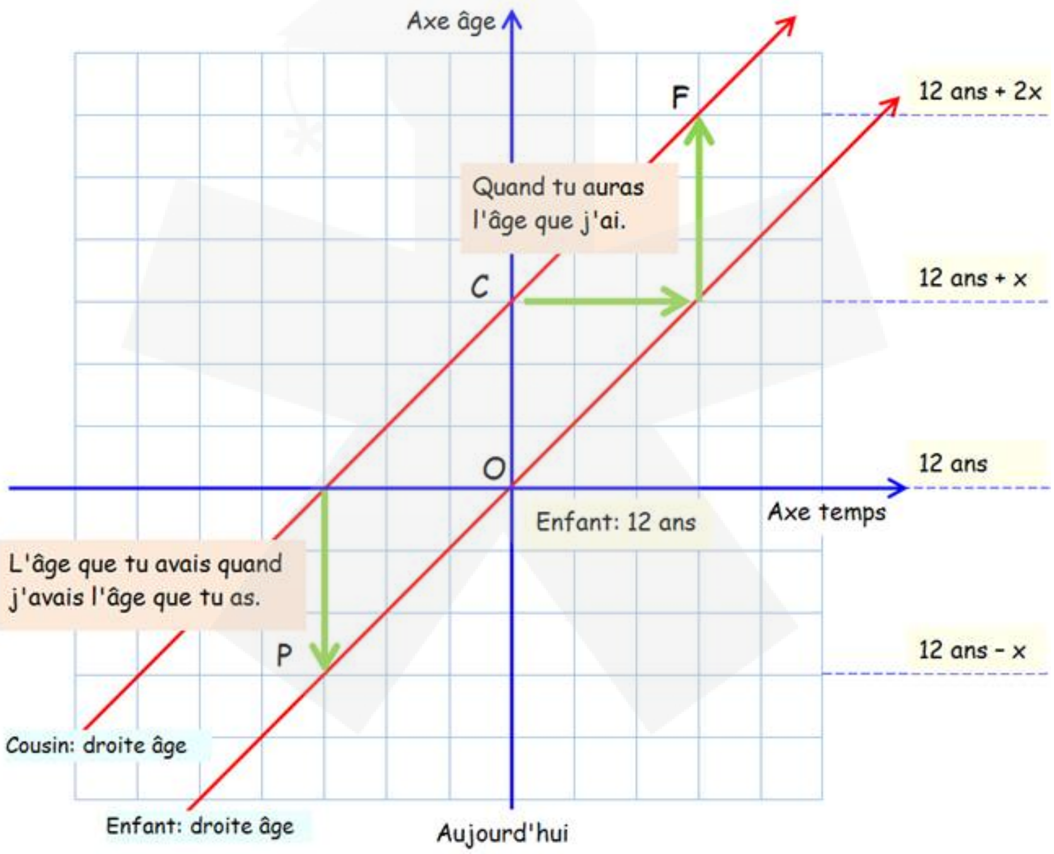
....

....

....

Illustration & explications

- Dessinez un repère classique à deux axes:
  - abscisses: le temps qui s'écoule; et
  - ordonnées: l'âge des individus.
- L'axe des ordonnées représente aujourd'hui
  - le point O correspond à l'âge de l'enfant; soit 12 ans
  - le point C, à celui du cousin; soit 12 ans plus x.
- Les droites rouges représentent le temps qui passe pour chacun, sachant que la pente est égale à un an d'âge de plus tous les ans (normal!).
  - le point F dans le futur: quand l'enfant aura l'âge du cousin;
  - le point P dans le passé: quand le cousin avait l'âge de l'enfant.
- On sait que les deux âges extrêmes, passé et futur, sont l'un le double de l'autre.



Avec l'aide de ce schéma, la mise en équation est très simple.

Résolution

Quand tu auras l'âge que j'ai, j'aurais … L'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as	F = 12 + 2x P = 12 – x
L'un est le double de l'autre.	F = 2 P 12 + 2x = 2 (12 – x)
Calcul	4x = 12 x = 3
Âge du cousin	A = 12 + 3 = **15 ans**

Vérification

- Quand j'avais ton âge (12 ans), tu avais 9 ans.
- Quand tu auras l'âge (15 ans) que j'ai (soit dans 3 ans), j'aurai 18 ans.
- Qui est bien deux fois 9 ans.

TROIS FOIS MON ÂGE dans 3 ANS …

Question

- Si on prend trois fois mon âge de dans trois ans, on retire trois fois mon âge d'il y a trois ans, vous trouverez mon âge exact.

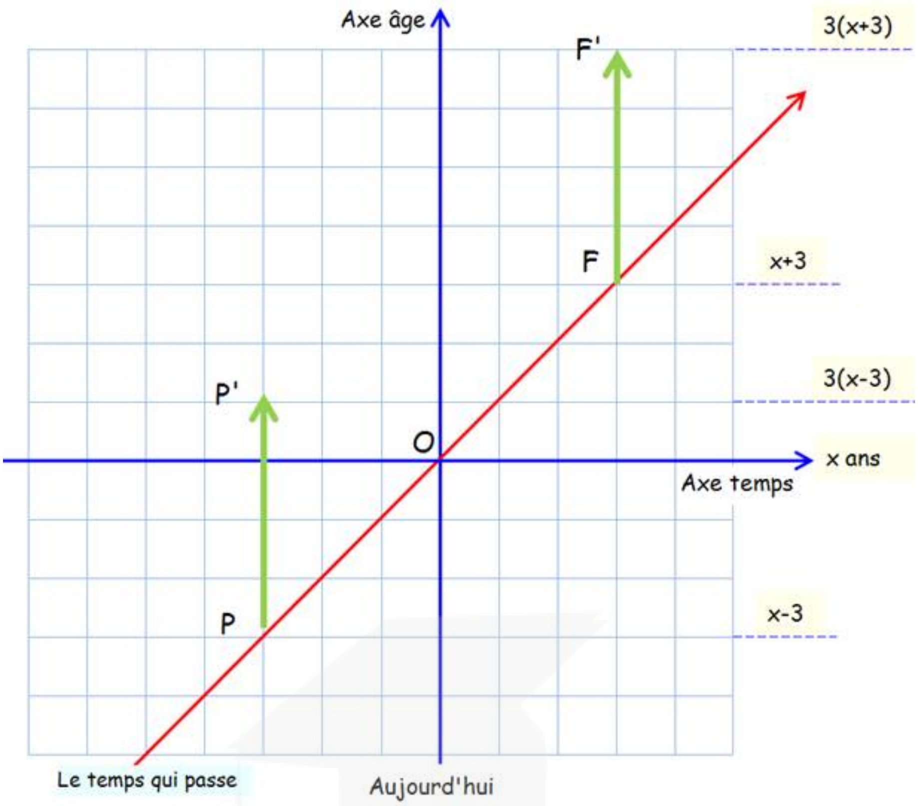
………

………

………

Illustration & explications

- Point F: mon âge dans 3 ans; F', trois fois plus (échelle sur la figure non respectée pour FF');
- Point P: mon âge il y a 3 ans; P', trois fois plus.
-



Résolution

- L'âge F' diminué de l'âge P' donne mon âge actuel.
  $3\ (x\ + 3) - 3\ (x - 3) = x$
  $x = 18$ ans.

Généralisation

- Si on prend n fois mon âge de dans n ans, on retire n fois mon âge d'il y a n ans, vous trouverez mon âge exact.
  Formulation: $n\ (x\ + n) - n\ (x - n) = x$
  Soit $x = 2n^2$

- Quand mon fils aura 15 ans de plus qu'il n'a aujourd'hui, il aura l'âge que j'avais quand j'avais 8 fois son âge.
- Quand il aura atteint l'âge que j'ai aujourd'hui, nous n'aurons ensemble, si je suis encore de ce monde, 31 fois l'âge qu'il avait quand j'avais 8 fois son âge.
- Quel est alors l'âge du fils de cet homme?

....

....

....

....

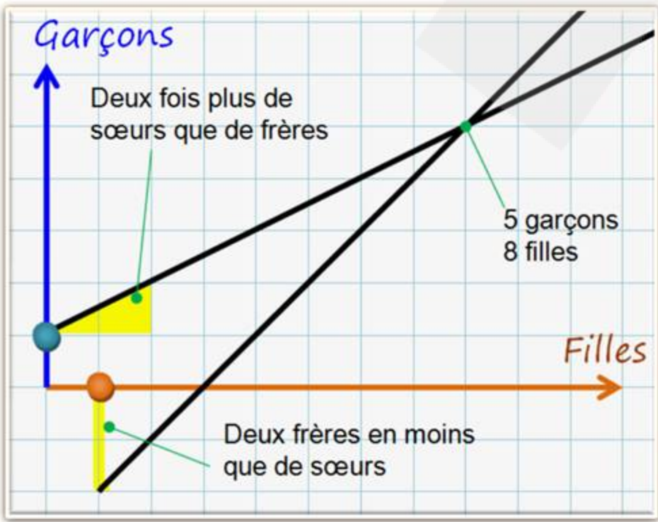
....

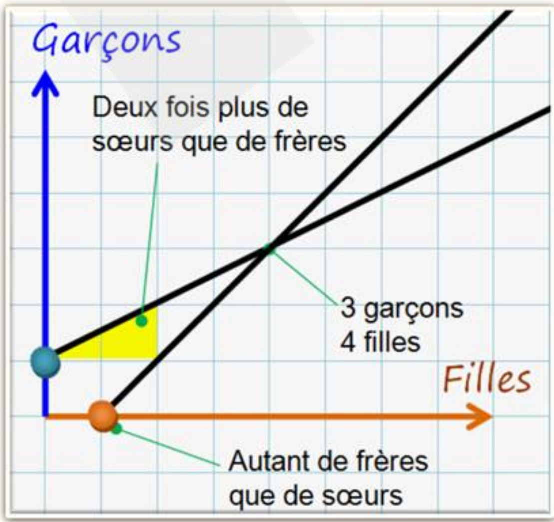
....

LES FRÈRES ET SŒURS (bis)

Question	
Je m'appelle **Isabelle**	Je suis son frère **Guillaume**
J'ai deux frères de moins que de sœurs	J'ai deux fois plus de sœurs que de frères
Solution	
Frères d'Isabelle: = garçons = sœurs d'Isabelle – 2 = filles – Isabelle – 2	Frères de Guillaume: = garçons – 1 = sœurs de Guillaume x 1/2 = filles x 1/2
g = f – 1 – 2 g = f – 3	g – 1 = 1/2 f 2g – 2 = f
On retranche les deux équations *Élimination de f et calcul de g* *Calcul de f avec f = g +3*	2g – 2 – g = f – (f – 3) g = 5 f = 8

- Réponse: 8 filles et 5 garçons.
- Pour Isabelle: 7 sœurs et 5 frères (écart de 2)
- Pour Guillaume: 4 frères et 2 fois plus de sœurs.





AUTRE MÉTHODE PLUS SYSTÉMATIQUE

- Si vous avez cherché par vous même, vous vous êtes rendus compte qu'il n'est pas si facile de savoir où il faut mettre le – 2, à moins que ce ne soit +2. Voici une méthode plus systématique.
- Avec le luxe d'une seule inconnue, ce qui va simplifier le calcul: ***g** est le nombre de garçons.*

Rappel de l'énoncé

Je m'appelle Isabelle	Je suis son frère Guillaume
J'ai deux frères de moins que de sœurs	J'ai deux fois plus de sœurs que de frères

Traduction en tableau

	Filles	*Garçons*		*Filles*	*Garçons*
Isabelle	1		**Guillaume**		1
Frères		g	*Frères*		g – 1
Sœurs	g + 2		*Sœurs*	2(g – 1)	
Total filles	**g + 3**			**2(g – 1)**	

Calcul

- Le nombre de filles est le même que ce soit Isabelle ou Guillaume qui parle.
- Le nombre de filles se déduit facilement.

g + 3 = 2(g – 1)
g = 5

f = g + 3 = 8

ANNIVERSAIRE et DATE DE NAISSANCE

Question

- En 2040: une personne née en 19**70** aura **70** ans
et une personne née en 20**20** aura **20** ans
- Est-ce une coïncidence ?

……

……

……

……

Solution

- Non! Mais, c'est tout simplement que 20 + 20 = 40 et que 70 + 70 = 40 avec retenue.
On aurait la même chose avec tous les nombres présentant ce doublon:
En 2020 pour 60 ans, car né en 1960 et 10 ans, car né en 2010.

Question

- J'ai quatre fois l'âge de mon petit-fils.
Si on inverse les deux chiffres de chaque âge,
le nouvel âge de mon petit-fils est égal à trois fois le mien.

....

....

....

....

....

....

Solution

Mon âge: 10X + Y et celui de mon petit-fils: 10x + y.
Alors: 10X + Y = 4 (10x + y) =>10 X + Y = 40x + 4y
Et: 10y + x = 3 (10X + Y) => 3 X + 30 Y = x + 10 y
On ajoute: 13 X + 31 Y = 41 x + 14 y

Le grand-père a 72 ans et le petit-fils 18 ans.
En effet: 18 x 4 = 72 & 27 x 3 = 81.

Un exemple parmi tant d'autres de ce genre de devinettes. On constate que les équations, dans ce cas, n'apportent pas grand chose. Le tâtonnement est la seule issue, ou un tableur.

Amusement – Âge répété

Propriété	
73 x 137 = 10 001 **73 x 13 837 = 1 01 01 01** **Exemples** **73 x 13 837 x 37 = 37373737** **73 x 13 837 x 18 = 18181818**	- Diviseur de 10 001. - Objet d'amusements sur l'âge: Pense à ton âge. Multiplie par 13 837 (avec une calculette, c'est conseillé). Multiplie encore par 73. Tu trouves ton âge répété quatre fois!

Cette année, l'âge de mon fils et le mien forment une suite de quatre chiffres. Et, curieusement, l'an dernier, j'avais un âge double de celui de mon fils.

Cette année nous avons 23 et 45 ans.
L'an dernier nous avions 22 et 44 ans.

Vérification de l'unicité de cette solution

Âge-suite	1234	2345	3456	4567	5678	6789
L'an dernier	1133	2244	3355	4466	5577	6688
Ratio	3	2	1,66...	1,5	1,4	1,33...

Nous aurions pu proposer que l'an dernier mon âge était le triple de celui de mon fils, avec pour solution 12 ans et 34 ans.

Équations DIOPHANTIENNES

Énigme

Je vends la moitié de mes œufs et ½ œuf.
Puis la moitié et ½.
Et encore la moitié et ½.
J'ai tout vendu sans casser d'œuf.
Combien d'œufs dans mon panier au départ ?

....

....

....

....

....

....

Solution

J'avais 7 œufs dans mon panier.

Client	*Panier*	*Vente*	*Reste*
1	7	3 ½ + ½ = 4	3
2	3	1 ½ + ½ = 2	1
3	1	½ + ½ = 1	0

Généralisation

On peut généraliser ce jeu en vendant les mêmes proportions d'œufs à " n " clients.
La quantité au départ est, en fait, **$2^n - 1$**.
Soit: 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127...

Énigme

J'ai acheté des livres pour mes enfants.
En rentrant, j'en donne la moitié plus un demi à Isabelle,
puis la moitié de ceux qui me restent plus un demi à Christelle
et le dernier que j'ai dans les mains à Guillaume.
Combien y avait-il de livres ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Solution

Il y avait 7 livres.

	Partage	*Reste*	*Calcul*	*Résultat*
Total		N		
Isabelle	$1/2\ N + 1/2$	$R = N - 1/2\ N - 1/2$	(1)	
Christelle	$1/2\ R + 1/2$	$1 = R - 1/2\ R - 1/2$	(2)	
Guillaume	1	0		
		(2) =>	$1/2\ R = 3/2$	$R = 3$
		(1) =>	$3 = 1/2\ N - 1/2$	**$N = 7$**

Remarque

- On aurait le même résultat en donnant à Guillaume la moitié de ce qui reste plus un demi.
(il restait 1: la moitié de 1 plus 1/2 donne bien 1)
- Le même problème peut se poser avec $1/3N + 1/3$ ou, en généralisant: $1/p\ N + 1/p$.

Énigme

- Je lègue mes 17 chevaux à mes trois fils de la manière suivante:
  Aîné: 1/2; Puîné: 1/3; Benjamin: 1/9.
  Mais c'est impossible. La moitié de 17 c'est 8,5. On ne va tout de même pas découper les chevaux …
  Erreur du père ? Non, il y a une solution !

Solution

Il se trouve qu'un sage à cheval passe par là et dénoue l'énigme ;;; grâce à son cheval …
Eh oui! Il y a maintenant 18 chevaux, et le partage se réalise sans problème:

- Aîné: 1/2 de 18 = 9
- Puîné: 1/3 de 18 = 6
- Benjamin: 1/9 de 18 = 2
- Somme: 9 + 6 + 2 = 17 chevaux

Le sage reprend son cheval et poursuit son chemin

Explication

La somme des fractions donnée par le légataire ne donne pas 1, mais 17/18 = 1 – 1/18 = 1/2 +1/3 + 1/9 .
In fine, les proportions 1/2, 1/3 et 1/9 ne sont pas exactement respectées. Mais les rapports entre les trois fils le sont:

- (1/2)/(1/3) = 3/2;
- (1/2)/(1/9) = 9/2;
- Soit les rapports respectifs: 1/2, 3/2 et 9/2.

Généralisation

- On trouvera la même chose pour toutes les solutions en nombres entiers de l'équation:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

- Comme
  - 7/8 = 1/2 + 1/4 + 1/8
  - 11/12 = 1/2 + 1/4 + 1/6

- Avec ces données, sauriez-vous distribuer 7 moutons à trois personnes selon les parts suivantes: 1/2, 1/3 et 1/8?

Énigme des diamants

Énigme

- Un nabab laisse un héritage de diamants à ses enfants:
  - Au premier: 1 diamant et 1/7 de ce qui reste;
  - Au deuxième: 2 diamants et 1/7 de ce qui reste;
  - Au troisième: 3 diamants et 1/7 de ce qui reste;
  - Etc.

- Combien d'enfants, combien de diamants en héritage, combien à chacun, lequel est favorisé?

....

....

....

....

....

....

Solution

- Il y a 36 diamants pour cet héritage et 6 enfants.

	1er	2è	3è	4è	5è	6è
Part fixe	1	2	3	4	5	6
Il reste	36 – 1 = 35	28	21	14	7	0
Part fractionnaire	35 / 7 = 5	4	3	2	1	0
Total par enfant	6	6	6	6	6	6
Il reste pour le suivant	36 – 6 = 30	24	18	12	6	0

Exemple de calcul: comment obtenir 28?
36 – 1 = 35; 35/7 = 5; 35 – 5 = 30; 30 – 2 = 28.

- Ils ont reçu 6 diamants chacun.

Les 36 diamants						Leur répartition
36	35	34	33	32	31	1 + 1/7 de 35
30	29	28	27	26	25	2 + 1/7 de 28
24	23	22	21	20	19	3 + 1/7 de 21
18	17	16	15	14	13	4 + 1/7 de 14
12	11	10	9	8	7	5 + 1/7 de 7
6	5	4	3	2	1	6 + 1/7 de 0

- Le tableau se met en équation de la manière suivante:

36 = (1 + 5) + (2 + 4) + (3 + 3) + (4 + 2) + (5 + 1) + (6 + 0)
= (1 + 35/7) + (2 + 28/7) + (3 + 21/7) + (4 + 14/7) + (5 + 7/7) + (6 + 0/7)

- Cette illustration nous met une puce à l'oreille: 36 est un carré.
  - La partie fixe (rose) est la somme des nombres de 1 à 6 = 6x7/2 = 21, et
  - La partie variable (bleue) est la somme des nombres de 1 à 5 = 5x6/2 = 15;
  - Total 21 + 15 = 36.

Un carré est la somme de deux nombres triangulaires consécutifs.

- Est-ce que cette énigme de partage fonctionnerait si nous choisissions un autre carré? Oui!

Exemple avec 25 = 5^2

Le premier reçoit: 1 diamant + 1/6 de 25 – 1 = 1/6 de 24 = 4
Total 5 diamants; reste 25 – 5 = 20
Le deuxième: 2 diamants + 1/6 de 20 – 2 = 1/6 de 18 = 3
Total 5 diamants; reste 20 – 5 = 15
Le troisième: 3 diamants + 1/6 de 15 – 3 = 1/6 de 12 = 2
Total 5 diamants; reste 15 – 5 = 10
Le quatrième: 4 diamants + 1/6 de 10 – 4 = 1/6 de 6 = 1
Total 5 diamants; reste 10 – 5 = 5
Le cinquième: 5 diamants + 1/6 de 5 – 5 = 1/6 de 0 = 0
Total 5 diamants; reste 5 – 5 = 0.

Bilan

Un carré C = c^2 peut se partitionner en une somme de c termes dont chacun est la somme de deux termes: k et c – k. Au rang k, le reste à partitionner est divisible par c + 1.

Exemple avec $C = c^2$ de 3 à 10,
avec F part fixe, V part variable et R le reste à chaque fois

F	V	R
1	2	6
2	1	3
3	0	0

F	V	R
1	3	12
2	2	8
3	1	4
4	0	0

F	V	R
1	4	20
2	3	15
3	2	10
4	1	5
5	0	0

F	V	R
1	5	30
2	4	24
3	3	18
4	2	12
5	1	6
6	0	0

F	V	R
1	6	42
2	5	35
3	4	28
4	3	21
5	2	14
6	1	7
7	0	0

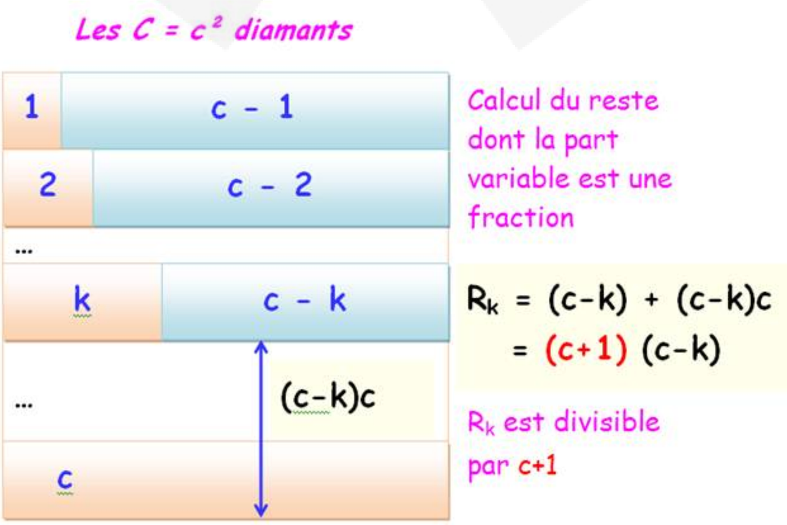
F	V	R
1	7	56
2	6	48
3	5	40
4	4	32
5	3	24
6	2	16
7	1	8
8	0	0

F	V	R
1	8	72
2	7	63
3	6	54
4	5	45
5	4	36
6	3	27
7	2	18
8	1	9
9	0	0

F	V	R
1	9	90
2	8	80
3	7	70
4	6	60
5	5	50
6	4	40
7	3	30
8	2	20
9	1	10
10	0	0

Génération

- Soit un nombre $C = c^2$ de diamants.
- Il s'agit de montrer que le partage en une partie fixe et une partie variable est toujours faisable. Au rang k, nous avons:
  - Part fixe = k; et
  - Part variable = reste de rang k (R_k) divisé par c+1.
- Soit donc à démontrer que le reste est toujours divisible par c+1. L'illustration montre ce résultat.



La flèche indique que l'aire sous-jacente vaut: largeur (c-k) fois longueur (c).

Énigme

Combien y a-t-il d'œufs dans le panier, en les disposant comme suit:

Par rangées de	Il en reste
2	1
3	2
4	3
5	4

....

....

....

....

....

....

Solution

N = 2a + 1 = 3b + 2 = 4c + 3 = 5d + 4
= 2 x 29 + 1 = 3 x 19 + 2 = 4 x 14 + 3 = 5 x 11 + 4 = 59

Équation – résolution en fonction de d

$$\mathbf{N = 5d + 4;\;\; a = \frac{5d+3}{2};\;\; b = \frac{5d+2}{3};\;\; c = \frac{5d+1}{4}}$$

Quelques solutions

N	a	b	c	d
59	**14**	**19**	**29**	**11**
119	**29**	**39**	**59**	**23**
179	**44**	**59**	**89**	**35**
239	**59**	**79**	**119**	**47**
60k-1	**15k-1**	**20k-1**	**30k-1**	**12k-1**

Énigme

Trois amis **A, B et C** décident de faire un repas en commun.
A amène 5 plats; **B** en amène 3; **C** n'apporte rien.
Chaque plat à la même valeur.
C verse 80 € aux deux autres. Ils sont d'accords.
Mais comment partager ces 80 € entre **A et B**?

....

....

....

....

....

....

....

....

Est-ce: 50 € à **A** et 30 € à **B** ? Non!

Solution

Prix de la part de chacun	80 €
Prix total du festin	3 x 80 = 240 €
Prix de chaque plat	240 / 8 = 30 €
A apporte (en valeur)	30 x 5 = 150
A paye son repas	80 €
En conséquence, **A** doit recevoir	150 – 80 = 70 €
Même raisonnement pour **B**	30 x 3 – 80 = 10 €

Devinette

Dans mon panier, j'ai des œufs.
En les comptant par 2, 3, 4, 5, et 6 il en reste toujours 1.
Par contre avec 7 ça tombe juste.
Combien d'œufs?

....

....

....

....

Solution

Soit N le nombre cherché.
En enlevant un œuf, N – 1 doit être divisible par 2, 3, 4, 5, et 6.
C'est-à-dire par le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) de ces quatre chiffres:

Départ:	2	3	4	5	6	
=>	2	3	2x2	5	2x3	
& PPCM	2	3	2	5		= 60

- Donc N - 1 = 60 k; Et N = 60 k + 1.

k =	1	2	3	4	5
60 k + 1 =	61	121	181	241	301
Divisible par 7 =>	non	non	non	non	**OUI**
Réponse =>					**301**

Devinette

- Soit les nombres 10, 12, 23, 24, 27, 40, 68
- Trouver les nombres dont la somme est 100.

....

....

....

....

....

....

....

....

Solution

- Voyons ces nombres modulo 10:

<table>
<tr><th>N</th><th>N mod10</th><th>Div par 10</th><th>Pair</th><th>Ce qui reste</th></tr>
<tr><td>10</td><td>0</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>23</td><td>3</td><td></td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>24</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>27</td><td>7</td><td></td><td></td><td>-3</td></tr>
<tr><td>40</td><td>0</td><td>0</td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>68</td><td>8</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Les nombres divisibles par 10 sont candidats pour la somme 100.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Trois nombres pairs qui ne pourront jamais donner un nombre divisible par 10.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Deux nombres dont la somme est divisible par 10</td></tr>
</table>

- Les nombres 23 et 27 font partie de la solution. Il est facile de compléter avec 10 et 40: 10 + 23 + 27 + 40 = 100.

Devinette

- Soit les nombres 51, 36, 3, 15, 9, 17, 63, 6, 53, 42, 33, 72
- Trouver les nombres dont la somme est 100.

Solution

- On remarque que pratiquement tous les nombres sont divisibles par 3. Racine numérique égale 3.
- Voyons donc ces nombres modulo 3, y compris 100:

N	N mod 3
3	0
6	0
9	0
15	0
17	2
33	0
36	0
42	0
51	0
53	2
63	0
72	0
100	*1*

- Les nombres 17 et 53 font exceptions; ils ne sont pas divisibles par 3.
- Comment tirer parti de cette situation?
- Nous savons que nous devons trouvez une somme réelle égale à 100, et son équivalent en modulo égale à 1 (cf. 100 mod 3 = 1).
- Or, aubaine, 2 + 2 = 4 soit 1 modulo 3; les autres nombres seront sans effet sur le modulo puisqu'ils ajouteront zéro.
- En conséquence 17 et 53 font partie de la somme recherchée. Il faut trouver le complément avec les autres nombres:
  100 – 17 – 53 = 30.
- Seuls les nombres 3, 6, 9, et 15 restent en lice pour atteindre 30.
  Et 6 + 9 +15 = 30.
- Bilan: 6 + 9 +15 + 17 + 53 = 100

DIVISIBILITÉ par 11

Pour trouver si un nombre est divisible par 11, il faut chercher son reste dans la division par 11 et, constater qu'il est nul. Faire la division c'est bien, mais c'est long !

Existe-t-il une astuce pour aller plus vite, sans effectuer l'opération ? Oui, et elle est relativement simple. Elle repose sur une particularité liant 11 à 100:

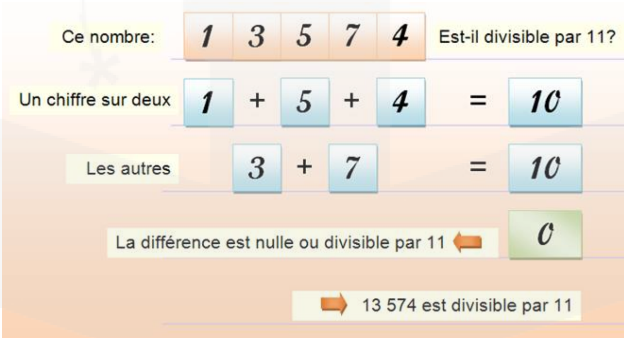
100 = 99 + 1

= 11 x 9 + 1

Il y a un 11 caché dans 100 !

Règle de divisibilité par 11

La règle est illustrée par cet exemple:



Un nombre est divisible par 11 si la somme de ses chiffres de rang pair soustraite de la somme de ses chiffres de rang impair est nulle ou un multiple de 11.

Amusements

Un nombre palindrome ou, a fortiori, un repdigit ayant une quantité paire de chiffres est divisible par 11.

Exemples:

N = 123321; P = 1+3+2 = 6 ; I = 2+3+1 = 6; P – I = 0.

N = 777777; P = 7+7+7 = 21 ; I = 7+7+7 = 21; P – I = 0.

Un nombre de deux chiffres ajouté à son retourné est divisible par 11. Exemple: 23 + 32 = 55 = 5 x 11. >>>

APROCHE – Reste de la division par 11

- Comment trouver le reste d'une division par 11 sans effectuer l'opération. Une astuce consiste à trouver 11 et ses multiples dans le nombre pour les éliminer aussitôt.

Exemples:

N	= *11.k + R*	R
58	= 11 x 5 + 3	R = 3
100	= 11 x 9 + 1	R = 1
1 001	= 11 x 91 + 0	R = 0
9 998	= 11 x 909 – 1 = 11 x 908 + 10	R = – 1 *ou* R = 10

- Pour rechercher la divisibilité par 11, seul importe le reste **R**; la valeur de **k** ne nous intéresse pas.
  Chaque fois que l'on peut trouver un multiple de 11, on l'élimine.
  Parfois, on ajoute 11, pour éviter un nombre négatif.

L'astuce que nous allons examiner, consiste à considérer les puissances de 10. *Voir* Modulo

ONZE ET PUISSANCES DE 10

- La question que nous nous posons est: quels sont les restes de la division par 11 des puissances de 10.

Puissance de 10	Avec 11	Reste
10 = 10^1	10 = 11 – 1 = (1 x 11) – 1	– 1
100 = 10^2	100 = 99 + 1 = (9 x 11) + 1	1
1 000 = 10^3	1 000 = 1 001 – 1 = (91 x 11) – 1	– 1
10 000 = 10^4	10 000 = 9 999 + 1 = (909 x 11) + 1	1
100 000 = 10^5	100 000 = 100 001 – 1 = (9091 x 11) – 1	– 1
Etc.		

Le reste de la division par 11 de 10^n est
1 pour **n pair** **&** **–1** pour **n impair.**

RACINE NUMÉRIQUE PAR 11

- La racine numérique par 11 d'un nombre N est le reste de la division par 11 de ce nombre. L'intérêt réside dans le fait que celle-ci est facile à calculer comme nous allons le découvrir progressivement.
- L'idée est qu'il faut retirer autant de fois 11 qu'on le peut.

Exemples*:*

13 => 13 – 11 = 2

25 => 25 – 22 = 3

100 => 100 – 99 = 1

- Ce qui veut dire, pour ce dernier exemple que: 100 divisé par 11 donne 1 pour reste: 100 = 9 x 11 + 1

Racine numérique par 11 de 100 = R_{11} (100) = 1.

Formalisation pour un nombre N

Opération	Formule	Exemple
• Soit un nombre	$N = \overline{cdu}$	N = 256
• En développant avec les puissances de 10	N = 100c + 10d + u	N = 200 + 50 + 6
• En mettant en évidence les multiples de 11	N = (99 + 1) c + (11 – 1) d + u	N = 198 + 2 + 55 – 5 + 6
• En retirant les multiples de 11	R_{11} = 1c – 1d + 1u	R_{11} = 2 – 5 + 6
• Conclusion: le reste de la division par 11 est	R_{11} = c – d + u	R_{11} = 3

Voir Numération / Système décimal

- Observez que seuls les chiffres sont utilisés pour former la racine numérique par 11. Sur cet exemple, 256 / 11 donne un reste de 3.

Règle

- Sur ce principe et en prenant directement les racines numériques des puissances de 10, on arrive facilement à établir la règle suivante
- La racine numérique par 11 d'un nombre est la différence entre:
  - la somme des chiffres de rang pair, et
  - la somme des chiffres de rang impair.

$$N = \overline{a_{2n}\, a_{2n-1} \ldots a_3\, a_2\, a_1\, a_0}$$
$$R_{11} = (a_0 + a_2 + a_4 \ldots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + a_5 \ldots + a_{2n-1})$$

Exemple

N = 123456

$R_{11} = (6 + 4 + 2) - (5 + 3 + 1) = 12 - 9 = 3$

En effet: 123456 = 11 223 x 11 + 3

Méthode alternative (plus pratique)

- Faire le calcul par couple de chiffres.

$$N = \overline{a_{2n}\, a_{2n-1} \ldots a_3\, a_2\, a_1\, a_0}$$
$$R_{11} = (a_0 + a_2 + a_4 \ldots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + a_5 \ldots + a_{2n-1})$$
$$R_{11} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n-1})$$

Exemple

N = 123456

$R_{11} = (6 - 5) + (4 - 3) + (2 - 1) = 1 + 1 + 1 = 3$

- Se souvenant que la quantité de 11 ne compte pas, lorsque la soustraction donne un nombre négatif:
  - soit on le garde;

- soit on ajoute 11.

Exemple pratique

N = 4 993 260 817 R_{11} = ?

On groupe les chiffres par 2						
	4 9	9 3	2 6	0 8	1 7	
Première méthode						
Rangs pairs	9	3	6	8	7	= 33
Rangs impairs	4	9	2	0	1	= 16
Différence						R_{11} = 33 – 16 = 17 et 17 – 11 = 6
Deuxième méthode						
Différence entre paires successives => Cumul des valeurs					7–1	= 6 => 6
				8–0		= 8 => 6 + 8 = 14 => 3
			6–2			= 4 => 4 + 3 = 7
		3–9				= -6 => 7 – 6 = 1
	9–4					= 5 => 5 + 1 = 6
Bilan						R_{11} = 6

DIVISIBILITÉ par 11

- Une première application du calcul de la racine numérique consiste à trouver rapidement si un nombre est divisible par 11.

Un nombre est divisible par 11 si

sa racine numérique par 11 est nulle.

Voir Formulation développée

Exemple général

N = 181 907

R_{11} = (8-1) + (9-1) + (7-0) = 7 + 8 + 7 = 22 => 0 Divisible par 11.

Exemple avec divisibilité reconnaissable au premier coup d'œil

N = 333 333

R_{11} = (3-3) + (3-3) + (3-3) = 0 => Divisible par 11.

N = 484

R_{11} = 4 + 4 – 8 => Divisible par 11.

N = 913

R_{11} = 9 + 3 – 1 => Divisible par 11.

Méthode par tranche de milliers

Cette méthode, valable pour les divisibilités par 7, 11 et 13, consiste à faire la somme des tranches paires de milliers diminuée de la somme des tranches impaires.
Ex: 1 358 024 679 1 + 24 – 358 – 679 = -1012 et 1012 = 11 x 92.
Ou 1012 avec méthode classique 1 + 1 = 0 + 2 divisible par 11.

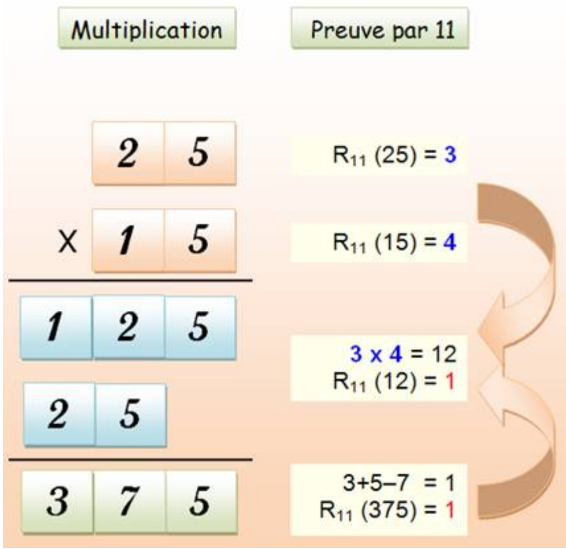
PREUVE PAR 11

Principe

- Si une opération est juste,
  Son image en racine numérique par 11 est juste.
  L'inverse n'est pas vrai: si l'image est juste, l'opération n'est pas forcément juste.
- La preuve par 9 est un peu plus pratique; elle est plus utilisée.
  Attention: comme pour celle-ci, la preuve par 11 donne une bonne indication sur la justesse d'une opération, mais n'en confirme pas la justesse à 100%.

Procédé

- On prend la racine de chaque terme, on effectue l'opération sur ces racines, et
  On compare à la racine du résultat de la vraie opération.



- La preuve par 11 permet à coup sûr de retrouver un chiffre manquant dans une opération. Voir application au calcul des racines cubiques

Voir Fondements de la preuve par 11

NOMBRES en xyyx, xxxx, abcabc …

- R_{11} (abba) = (a-b) + (b-a) = 0
5665 = 11 x515

Tous les nombres en **abba**

sont divisibles par 11.

- R_{11} (aaaa) = 1111 a = 11 x 101 x a
9999 = 11 x 909

Tous les nombres en **aaaa**

sont divisibles par 11 et par 101.

- R_{11} (abc… cba) = (a + c + …) – (… + c + a)
4554 = 11 x 414

Tous les nombres palindromes

à quantité paire de chiffres

sont divisibles par 11.

- R_{11} (abc ...abc) = a – b + c ... – a + b – c = 0
  123123 = 11 x 11 193

Tous les nombres à répétition d'un groupe de chiffres en quantité impaire

sont divisibles par 11.

Divisibilité de $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ par 11

Valeur pour n = 0	$3^{0+3} - 4^{4\text{x}0+2} = 3^3 - 4^2 = 27 - 16 = 11$ La divisibilité est vraie pour n= 0.
Valeur pour n + 1	$3^{(n+1)+3} - 4^{4(n+1)+2} = 3^{n+4} - 4^{4n+6}$
But: faire émerger la forme en n	$= 3^{n+3} \text{ x } 3 - 4^{4n+2} \text{ x } 4^4$
Favoriser une mise en facteur	$= 3^{n+3} \text{ x } 3 - 4^{4n+2} \text{ x } 256$

de notre forme en n	$= 3^{n+3} \times 3 - 4^{4n+2} \times (253 + 3)$ $= (3^{n+3} - 4^{4n+2}) \times 3 + 4^{4n+2} \times 253$ Chance? 253 = 11 x 23
Combinaison linéaire de deux termes avec coefficient entiers.	$= (3^{n+3} - 4^{4n+2}) \times 3 + 4^{4n+2} \times 11 \times 23$
Divisibilité par 11 de chacun des termes de la somme	$(3^{n+3} - 4^{4n+2}) \times 3 + 4^{4n+2} \times 11 \times 23$ Si ce premier terme est divisible par 11, alors toute l'expression est divisible par 11.
Conclusion	Si l'expression est divisible par 11 pour n, elle est aussi pour n+1. Or elle est vraie pour n = 0. Par voie d'héritage, la propriété est vraie pour tout n.
Généralisation $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ La relation de divisibilité est vraie pour d'autres valeurs des termes additifs en rose.	Si 0 et 0 + 5k divisible par 11 Si 1 et 4 + 5k divisible par 11 Si 2 et 3 + 5k divisible par 11 Si 3 et 2 + 5k divisible par 11 … Divisible par 77 pour $\{0, 0\}_P$, $\{1, 4\}_I$, $\{2, 8\}_P$, $\{3, 12\}_I$, $\{4, 1\}_P$… L'indice impose que n soit pair ou impair.

APPROCHE & CURIOSITÉ

• **Prenons un nombre:**	123
• **Ce nombre n'est pas divisible par 9 ?**	123 = 13 x 9 + 6
• **Le reste de la division par 9 est:**	6
• **Décomposons ce nombre:**	123 = 100 + 20 + 3
• **Observons le reste de chaque terme en le divisant par 9 :**	100 = 11 x 9 + 1 20 = 2 x 9 + 2 3 = 0 x 9 + 3
• **N'est-ce pas troublant: on retrouve le nombre du départ.**	1, 2 & 3
• **Encore plus bluffant: la somme des chiffres est égale au reste de la division.**	1 + 2 + 3 = 6
• **Encore une observation intéressante: la soustraction du nombre et du reste.**	123 – 6 = 117
• **Or cette différence est aussi divisible par 9.**	117 = 13 x 9

Retenons pour le moment, et sous réserve de preuves

Le reste de la division par 9 d'un nombre ***n = abc***,

est la somme de ces chiffres ***r = a + b + c.***

La différence ***n – r*** est divisible par 9.

Preuve par neuf

Soit une opération arithmétique. Son image avec les sommes numériques est également correcte. C'est la preuve par neuf.

Exemple avec une multiplication

Opération	123	x 456	= 56 088
Image (SN)	6	6 6 x 6 ⇨ 9	9 9

Égalité

Exemple avec une addition

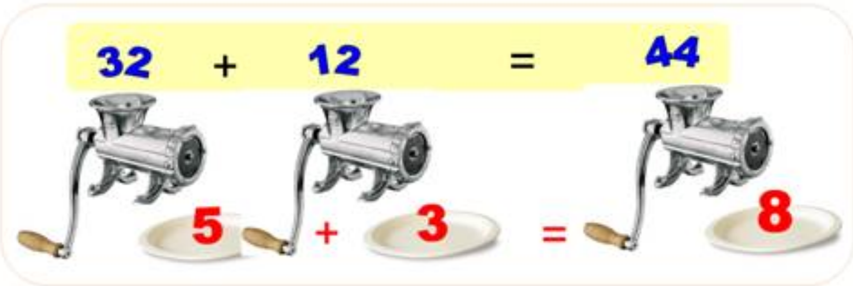
Opération	15	+ 12	+ 20	= 47
Image (SN)	6	3	2 6 + 3 + 2 ⇨ 2	2 2

Égalité

- Si une opération est juste, la même opération sur les sommes numériques est également juste. Nous venons d'effectuer une preuve par neuf.

Notez bien que, si l'égalité des racines numériques est vraie, l'opération peut être fausse; il suffit que plusieurs erreurs se compensent pour donner les sommes numériques qui conviennent. Néanmoins, si l'égalité est fausse, il est certain que l'opération est fausse.

- Il existe aussi une preuve par 11, un peu moins pratique, il est vrai.



Observations

- Notons tout de suite que 9 ne divise aucun des nombres: 10, 100, 1000 … 10^n.
- Voyons les restes de la division par 9 de ces nombres et leurs multiples:

10 = 9 + 1	100 = 99 + 1	1 000 = 999 + 1	Reste 1
20 = 2 x 9 + 2	200 = 198 + 2	2 000 = 1998 + 2	Reste 2
30 = 2 x 9 + 3	300 = 297 + 3	3 000 = 2997 + 3	Reste 3
…	…	a 000 = … + a	Reste a

Conclusion

Reste de ($a \times 10^k$ / 9) = a

On dit: dans le monde de la division par 9, ce nombre a un reste égal à **a**.

Ou encore: en coupant le nombre en tranches (en modules) de 9, il reste un morceau égal à **a**.
En abrégé: ce nombre modulo 9 **a**. (signe égal à trois barres pour montrer une "égalité" dans le monde des modulos)

Applications

n =	123	=	100	+	20	+	3			
Reste de la division par 9		=	1	+	2	+	3	⇨	6	
n =	123	=					9K	+	6	≡ 6 mod 9

n =	345	=	300	+	40	+	5			
Reste de la division par 9		=	3	+	4	+	5	⇨	3	
n =	345	=					9K	+	3	≡ 3 mod 9

n =	981	=	900	+	80	+	1			
Reste de la division par 9		=	9	+	8	+	1	⇨	0	
n =	981	=					9K	+	0	≡ 0 mod 9

- Exploitons la vision modulo pour formaliser les résultats que nous venons d'observer.

Voyons d'abord les puissances de 10

10	≡ 1	mod 9	10 – 1 = 9	Tous multiples de 9
100	≡ 1	mod 9	100 – 1 = 99	
1000	≡ 1	mod 9	1000 – 1 = 999	
10^x	**≡ 1**	**mod 9**	10^x – 1 = ...99	

Nombre a fois une puissance de 10

a . 10	≡ a	mod 9	10 . a – a	Tous multiples de 9
a . 100	≡ a	mod 9	100 . a – a	
a . 1000	≡ a	mod 9	1000 . a – a	
a . 10^x	**≡ a**	**mod 9**	10^x . a – a	

On peut ajouter ces expressions

u	≡	u	mod 9
10 d	≡	d	
100 c	≡	c	
1000 m	≡	m	
n = 1000 m + 100 c + 10 d + u	**≡**	**m + c + d + u**	

Le modulo 9 d'un nombre est la somme de ses chiffres,

soit sa somme numérique.

Conséquence

Tout nombre **n = ... + 1000 . m + 100 . c + 10 . d + a** diminué de la somme de ses chiffres **r = ... m + c + d + u** est divisible par 9.

Cas de l'élimination des 9

Lors du calcul de **r**, on peut éliminer les **9** dès qu'ils apparaissent.

En effet: On cherche une différence divisible par 9. On peut y retirer autant de 9 que l'on veut, sans changer le caractère de divisibilité.
Si **(n – a)** est divisible par 9 alors **(n – a – 9)** est encore divisible par 9.

D'ailleurs, en anglais, la preuve par 9 est appelée **Casting out nines** (éliminer les neufs).

Somme numérique ou racine numérique

La somme numérique est la somme des chiffres d'un nombre, éventuellement répétée jusqu'à obtenir un seul chiffre. **Note:** la somme numérique d'un nombre formé de 9, est égale à 9. Ajouter un 9 ne change pas la somme numérique.	n = 456 SN = 4 + 5 + 6 = 15 SN = 1 + 5 = **6** n = 999 SN = 9 + 9 + 9 = 27 SN = 2 + 7 = **9**
Le 9 est neutre dans la somme numérique. On l'élimine autant que possible. **Note:** calcul rapide de la somme numérique en groupant les somme donnant 9, considéré comme 0 en l'occurrence.	n = 456 SN = 9 + 6 SN = **6** n = 123456789 SN = 1+8 + 2+7 +3+6 + 4+5 + 9 SN = **0**

http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Decompos/RaciNume.html

PREUVE PAR 9

Calculs pratiques pour débutants

- La preuve par neuf utilise la **racine numérique** d'un nombre,
  - Qui est en fait la **somme des chiffres** du nombre.
  - La valeur **9 étant assimilée à 0.**
  - Nous expliquerons pourquoi ci-dessous.

- Les adeptes de numérologie emploient une racine voisine.
  - La racine théosophique ou racine essentielle.
  - La valeur 9 est conservée.
  - Car toutes les valeurs des chiffres sont significatives: le 0 comme le 9.

Racine numérique	**de 459 =>**	**4 + 5 + 9 = 9 + 9 = 0**	Un neuf vaut 0
Racine théosophique	**de 459 =>**	**4 + 5 + 9 = 18 = 9**	Les neufs sont conservés

Anglais: Cast out the nines, digital root

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

APPROCHE

Observations

Nombre					
18	/	9	= 2	reste	**0**
19	/	9	= 2		**1**
20	/	9	= 2		**2**

Somme des chiffres						
1 + 8	= 9	/	9	= 1	reste	**0**
1 + 9	= 10	/	9	= 1		**1**
2 + 0	= 2	/	9	= 0		**2**

On remarque

Si on divise le nombre

ou la **somme de ses chiffres**

par 9,

on obtient le même reste

- La magie de la preuve par neuf tient à cette observation
- Notez bien que

  - la somme des chiffres est aussi un nombre
  - et la somme de ses chiffres divisée par 9 redonnera à nouveau le même reste
  - Et on peut continuer …

Faire la somme des chiffres jusqu'au bout

Nombre	Somme des chiffres	Reste de la division par 9
19		19/9 = 2 x 9 + **1**
19	1 + 9 = **10**	10/9 = 1 x 9 + **1**
10	1 + 0 = 1	1/9 = 0 x 9 + **1**

....

....

....

....

....

....

....

....

RÈGLE PRATIQUE

1) On ajoute les chiffres du nombre.
   Puis ceux de la somme obtenue.
   On recommence.

2) On élimine tous les 9 qui apparaissent.
   On obtient la racine numérique qui sert pour la

preuve par neuf

Exemple: **Calculer la racine numérique de ce nombre**

4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**
4	+ 5	Somme des deux premiers chiffres				
	9	Élimination des 9				
	0					
		6	+ 7	Deux suivants		
		13		Etc.		
		1 + 3	= 4			
			4	+ 8		
			12			
			1 + 2	= 3		
				3	+ 9	
				3	+ 0	
				3		+ 1
					4	
La racine numérique de 4567891 est **4** Le reste de la division par 9 de ce nombre est **4**						

La quantité d'opérations à réaliser est parfois appelée le rang de la racine numérique.

Voir Racine numérique et rang

....

....

....

OPÉRATIONS

La racine numérique d'un nombre est simple à calculer

Plus extraordinaire:

Une opération **juste**

est également **juste** avec

les racines numériques

Attention: pas vrai dans l'autre sens

Exemple

Nombres	**N**	12	+ 25	= 37
Racines Numériques	**R**	3	+ 7	= 10

ADDITION

N	R
23	5

+ 56		2
+ 73		1
152	= > **8**	**8**

En pratique

- À côté de l'addition, on réserve une colonne
- dans laquelle on écrit les racines numériques
- On vérifie que la **SOMME** des R
- est égale à la racine numérique du résultat

R

5 + 2 + 1 = **8**

152 => 1 + 5 + 2 = **8**

SOUSTRACTION

N		R
456		6
- 123		6
333	=> 9 => **0**	**0**

En pratique

- Colonne pour les R

R

On vérifie que la **DIFFÉRENCE** des R	6 - 6 = **0**
est égale à la racine numérique du résultat	333 => 3+3+3 = 9 => **0**

Astuce!
Pour vérifier l'égalité, souvenez vous que les 9 disparaissent, mais vous pouvez en ajouter, notamment pour éviter les nombres négatifs.
Ex: 4045 – 2095 = 1050

⇨ 4 – 7 = –3 à comparer à 6
En ajoutant 9 l'égalité est bien là: –3 + 9 = 6.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

MULTIPLICATION

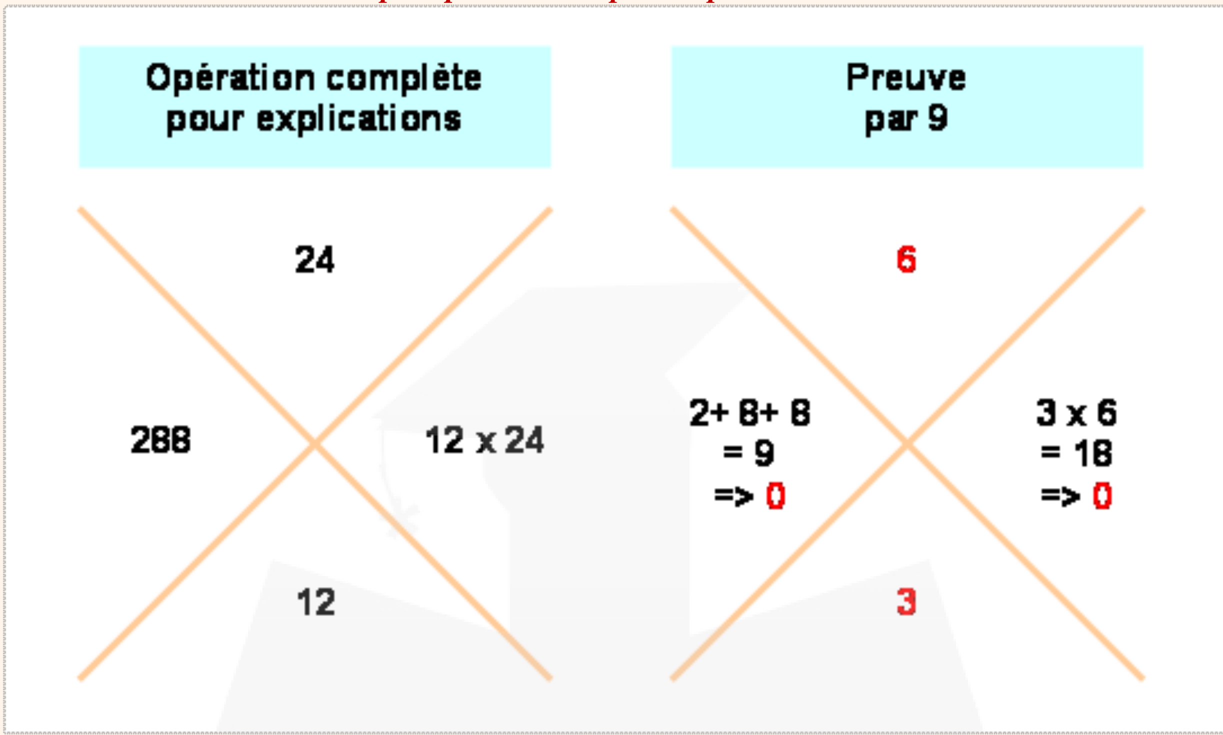
N	R
24	6
x 12	3
48	
24	

288	=> 9 => **0**	18 => **0**

En pratique

• Colonne pour les R • On vérifie que le **PRODUIT** des R • est égal à la racine numérique du résultat	R 6 x 3 = **18 => 0** 288 => 2 + 8 + 8 => **9 => 0**

On peut présenter la preuve par 9 en croix



DIVISION

Un tout petit peu de théorie

- Pour la division, la preuve par 9 est simple

si on se souvient bien de ce qu'est une division

- Quand on divise ***a*** par ***b*** on obtient

  un quotient ***q*** et un reste ***r***

a = b . q + r

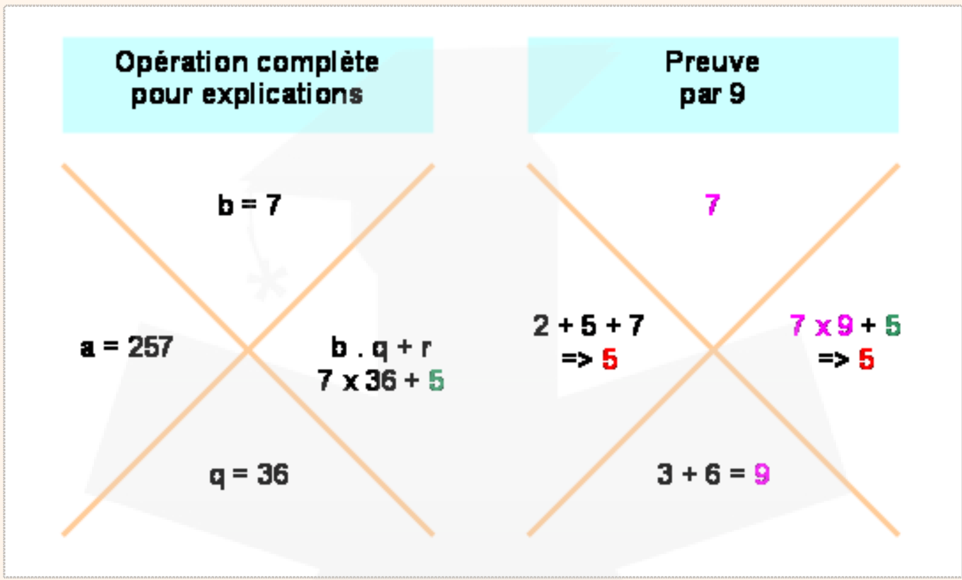
Exemple 257 = 7 x 36 + 5

- Pour effectuer la preuve par 9 de la division
- Il faut obtenir l'image de cette opération

5 = 7 x 9 + 5

5 = 0 + 5

En pratique, on fait une croix



Autre exemple

Opération

68	**3**
08	22
2	

Preuve par 9

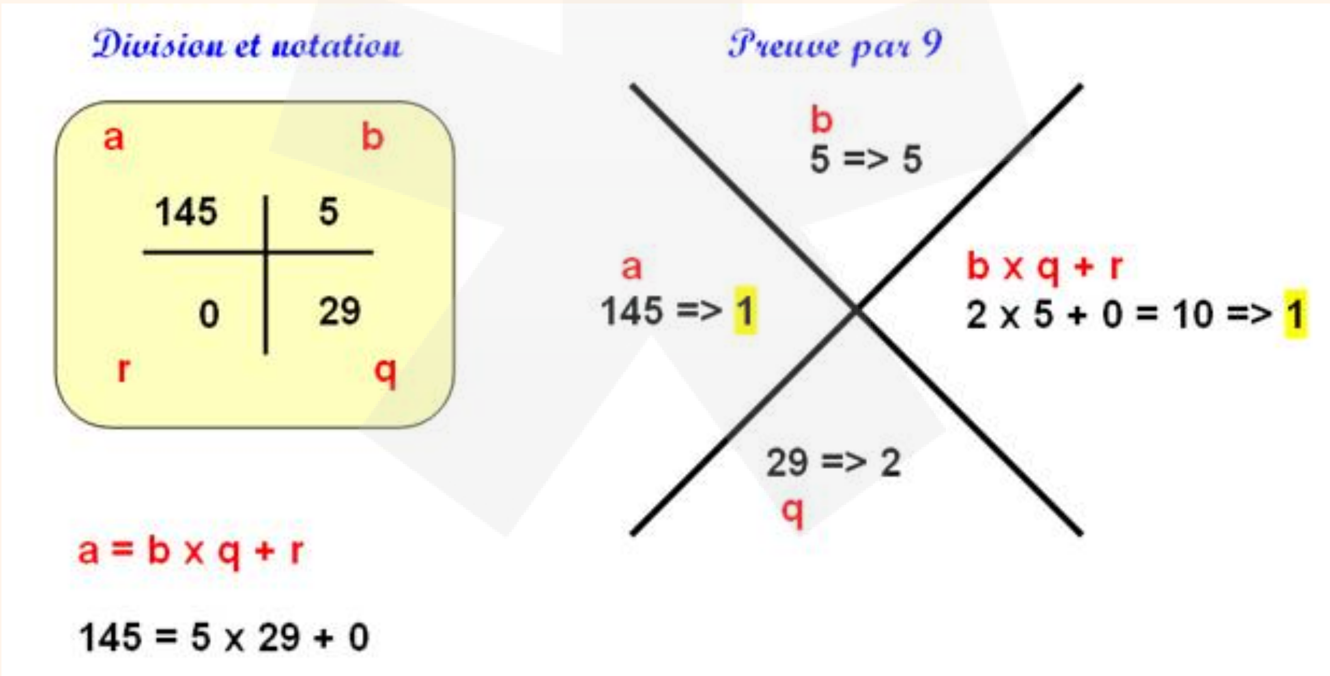
	3			
6 + 8 = 14 => 5		3 x 4 = 12 => 3	on ajoute le reste =>3 + 2	= 5
	2 + 2 = 4			

Les cellules grises matérialisent la croix que l'on dessine habituellement

Disposition à retenir

	Diviseur		
Nombre à diviser (dividende)	*égal*	**Produit** (diviseur par quotient)	**+ Reste** (à ne pas oublier)
	Quotient		

Encore un exemple: 145 / 5 = 29



....

....

....

....

....

....

....

....

PRUDENCE

Si la preuve par 9 échoue Le résultat de l'opération est faux	Si la preuve par 9 réussit L'opération n'est pas forcément exacte

- Si la preuve par 9 donne un bon résultat
- Il se peut que plusieurs erreurs se compensent
- C'est pourquoi le résultat de l'opération n'est pas forcément juste

Mais, avec cette vérification,

on obtient une meilleure assurance tout de même

Racine numérique

- Trouver la racine numérique d'un nombre c'est l'opération réalisée pour effectuer une preuve par neuf.
- Pour trouver la racine numérique d'un nombre, on ajoute les chiffres du nombre.

Nombre	Racine Num.	
11	2	r1
222	6	r1

• Si le nombre comporte plus d'un chiffre, on recommence à ajouter les chiffres. • Et, cela autant de fois que nécessaire pour aboutir à un seul chiffre. • La quantité d'opérations est appelée le rang de la racine numérique.	567 888 888	18 9 r2 48 12 3 r3
• Le neuf étant équivalent à 0, en pratique le calcul est simplifié en éliminant tous les neufs et toutes les sommes évidentes égales à 9. • Attention, le calcul du rang ne tient pas compte de ces raccourcis.	1 999 999 181 270 362	1 r3 3 r2

EXEMPLES: N, RN, r

Exemple: N = 789 789; Racine Numérique = 3;
En trois calculs: r = 3

80, 8, 1	150, 6, 1	980, 8, 2	789 789, 3, 3	999 980, 8, 2
81, 0, 1	151, 7, 1	981, 0, 2	789 790, 4, 2	999 981, 0, 2
82, 1, 2	152, 8, 1	982, 1, 3	789 791, 5, 2	999 982, 1, 3
83, 2, 2	153, 0, 1	983, 2, 2	789 792, 6, 2	999 983, 2, 3
84, 3, 2	154, 1, 2	984, 3, 2	789 793, 7, 2	999 984, 3, 3
85, 4, 2	155, 2, 2	985, 4, 2	789 794, 8, 2	999 985, 4, 3
86, 5, 2	156, 3, 2	986, 5, 2	789 795, 0, 2	999 986, 5, 2
87, 6, 2	157, 4, 2	987, 6, 2	789 796, 1, 3	999 987, 6, 2
88, 7, 2	158, 5, 2	988, 7, 2	789 797, 2, 3	999 988, 7, 2
89, 8, 2	159, 6, 2	989, 8, 2	789 798, 3, 3	999 989, 8, 2
90, 0, 1	160, 7, 1	990, 0, 2	789 799, 4, 3	999 990, 0, 2
91, 1, 2	161, 8, 1	991, 1, 3	789 800, 5, 2	999 991, 1, 3
92, 2, 2	162, 0, 1	992, 2, 2	789 801, 6, 2	999 992, 2, 3
93, 3, 2	163, 1, 2	993, 3, 2	789 802, 7, 2	999 993, 3, 3
94, 4, 2	164, 2, 2	994, 4, 2	789 803, 8, 2	999 994, 4, 3
95, 5, 2	165, 3, 2	995, 5, 2	789 804, 0, 2	999 995, 5, 2
96, 6, 2	166, 4, 2	996, 6, 2	789 805, 1, 3	999 996, 6, 2
97, 7, 2	167, 5, 2	997, 7, 2	789 806, 2, 3	999 997, 7, 2
98, 8, 2	168, 6, 2	998, 8, 2	789 807, 3, 3	999 998, 8, 2
99, 0, 2	169, 7, 2	999, 0, 2	789 808, 4, 2	999 999, 0, 2
	170, 8, 1		789 809, 5, 2	
			789 810, 6, 2	
			789 811, 7, 2	
			789 812, 8, 2	
			789 813, 0, 2	
			789 814, 1, 3	
			789 815, 2, 3	
			789 816, 3, 3	

			789 817, 4, 2 789 818, 5, 2 789 819, 6, 2 789 820, 7, 2	

- Nombres correspondant au changement de rang au plus tôt:
  - Rang 1: 1
  - Rang 2: 19 — 1 + 9 = 10 => 1 + 0 = 1
  - Rang 3: 199 — 1 + 9 + 9 = 19 => 1 + 9 = 10 => 1 + 0 = 1
    - 1999 — 9 x 3 + 1 = 28 => 2 + 8 = 10 => 1 + 0 = 1
    - $19..9_4$ — 9 x 4 + 1 = 37 => 3 + 7 = 10 => 1 + 0 = 1
    - $19..9_5$ — 9 x 5 + 1 = 46 => 4 + 6 = 10 => 1 + 0 = 1
    - …
    - $19..9_{15}$ — 9 x 15 + 1 = 136 => 1 + 3 + 6 = 10 => 1 + 0 = 1
  - Rang 4: $19..9_{52}$ — 9 x 52 + 1 = 469 => 4 + 6 + 9 = 19 => 1 + 9 = 10 …
- Il faut attendre un nombre avec 53 chiffres pour atteindre le quatrième rang.

RACINE Numérique multiplicative

- On peut imaginer multiplier les chiffres au lieu de les additionner.
- Intérêt de curiosité uniquement.

12	2
123	6
99	8

EXEMPLES: N, RN multiplicative

Exemple:
N = 57 => 5 x 7 = 35 => 3 x 5 = 15 => 1 x 5 = 5
En rouge, les records de rang successifs.

10 , 0	40 , 0	70 , 0
11 , 1	41 , 4	71 , 7
12 , 2	42 8	72 , 14 , 4
13 , 3	43 , 12 , 2	73 , 21 , 2
14 , 4	44 , 16 , 6	74 , 28 , 16 , 6
15 , 5	45 , 20 , 0	75 , 35 , 15 , 5
16 , 6	46 , 24 , 8	76 , 42 , 8
17 , 7	47 , 28 , 16 , 6	**77 , 49 , 36 , 18 , 8**
18 , 8	48 , 32 , 6	78 , 56 , 30 , 0
19 , 9	49 , 36 , 18 , 8	79 , 63 , 18 , 8
20 , 0	50 , 0	80 , 0
21 , 2	51 , 5	81 , 8

22 , 4	52 , 10 , 0	82 , 16 , 6
23 , 6	53 , 15 , 5	83 , 24 , 8
24 , 8	54 , 20 , 0	84 , 32 , 6
25 , 10 , 0	55 , 25 , 10 , 0	85 , 40 , 0
26 , 12 , 2	56 , 30 , 0	86 , 48 , 32 , 6
27 , 14 , 4	57 , 35 , 15 , 5	87 , 56 , 30 , 0
28 , 16 , 6	58 , 40 , 0	88 , 64 , 24 , 8
29 , 18 , 8	59 , 45 , 20 , 0	89 , 72 , 14 , 4
30 , 0	60 , 0	90 , 0
31 , 3	61 6	91 , 9
32 , 6	62 , 12 , 2	92 , 18 , 8
33 , 9	63 , 18 , 8	93 , 27 , 14 , 4
34 , 12 , 2	64 , 24 , 8	94 , 36 , 18 , 8
35 , 15 , 5	65 , 30 , 0	95 , 45 , 20 , 0
36 , 18 , 8	66 , 36 , 18 , 8	96 , 54 , 20 , 0
37 , 21 , 2	67 , 42 , 8	97 , 63 , 18 , 8
38 , 24 , 8	68 , 48 , 32 , 6	98 , 72 , 14 , 4
39 , 27 , 14 , 4	69 , 54 , 20 , 0	99 , 81 , 8