e-orthophonie
84 rue du 11 Novembre, 42210 l'HOPITAL LE GRAND
Tél. : 04.77.37.79.98
Site internet : www.e-orthophonie.fr

Préparation en ligne au concours d'orthophonie

	1	2	3	4	5	6
Maîtrise des notions :	TB	TB	TB	TB	TB	TB
	B	B	B	B	B	B
	M	M	M	M	M	M
	A revoir	A revoir	A revoir	A revoir	A revoir	A revoir

	1	2	3	4	5	6
Restitution des notions :	TB	TB	TB	TB	TB	TB
	B	B	B	B	B	B
	M	M	M	M	M	M
	A revoir	A revoir	A revoir	A revoir	A revoir	A revoir

Carrés

L'abaque suivant permet de calculer facilement les carrés des nombres entiers avec des additions.

Il suffit de remplir le tableau de gauche à droite en suivant les flèches.
Chaque nombre de la deuxième ligne est obtenu en ajoutant ceux qui sont sur sa flèche.
La deuxième ligne donne les carrés des nombres de la première ligne.

1	2	3	4	5
1	4	9	16	25

Par exemple :
$4^2 = 9 + 3 + 4$
Donc
$4^2 = 16$.

Principe : **$n^2 = (n-1)^2 + (n-1) + n$** .

Si l'on connaît la méthode pour élever au carré un nombre qui se termine par 5, on peut aussi trouver mentalement le carré d'un nombre quelconque.

Truc : pour calculer de tête le carré d'un nombre se terminant par 5.
On prend le **nombre** de dizaines multiplié par son successeur.
Cela donne le **nombre** de centaines du résultat.
On écrit alors 25 à droite du nombre de centaines pour obtenir le résultat.

Exemples :
35 est composé de 3 dizaines et 5 unités, son carré s'obtient :
nombre de centaines : 3*4=12, le carré est 1225
65 est composé de 6 dizaines et 5 unités, son carré s'obtient :
nombre de centaines : 6*7=42, le carré est 4225
105 est composé de 10 dizaines et 5 unités, son carré s'obtient :
nombre de centaines : 10*11=110, le carré est 11025

Justification
Soit (10d + 5) le nombre qui s'écrit avec d comme **nombre** de dizaines et 5 comme **chiffre** des unités.
*Avec **45** par exemple, nous avons **d = 4** et avec **235** nous avons **d = 23**.*
Alors
$(10d + 5)^2 = (10d)^2 + 2 \times 10d \times 5 + 5^2$
$(10d + 5)^2 = 100d^2 + 100d + 25$
$(10d + 5)^2 = 100d(d+1) + 25$
Le résultat a pour nombre de centaines le produit d(d+1).
On écrit 25 à droite du produit d(d+1) et on obtient donc le résultat final.

Application avec un nombre quelconque ne se terminant pas par 5 :

il suffit de se ramener avec une addition ou une soustraction à un nombre se terminant par 5 voire par 0.
Il faut alors utiliser les identités remarquables et être bon en calcul mental.

Exemples :

$\mathbf{83^2} = (80 + 3)^2 = 80^2 + 2x3x80 + 3^2 = 6400 + 480 + 9 = 6889$. Ici il est inutile d'utiliser 85^2

Mais on pourrait faire $\mathbf{83^2} = (85 - 2)^2 = 85^2 - 2x2x85 + 4 = 6889$

$\mathbf{87^2} = (85 + 2)^2 = 85^2 + 2x2x85 + 2^2 = 7225 + 340 + 4 = 7569$

et

$\mathbf{88^2} = (85 + 3)^2 = 85^2 + 2x3x85 + 3^2 = 7225 + 510 + 9 = 7744$

Ce dernier exemple peut aussi être traité ainsi : $\mathbf{88^2} = (90 - 2)^2 = 8100 -2x2x90 + 2^2 = 7744$.

En général on préfère utiliser une addition.

Autre truc : pour multiplier deux nombres de deux chiffres dont les dizaines sont égales et dont la somme des chiffres des unités est 10.

Exemple :

47 x 43 = 2021 (car 4x(4+1) = 20 et 7x3=21)

36 x 34 = 1224 (car 3x(3+1) = 12 et 6x4=24)

51 x 59 = 3009 (car 5x(5+1) = 30 et 1x9=09)

Justification

Soit d le nombre de dizaines et u le chiffre des unités du premier nombre.

Le produit est donc

$(10\,d + u)\,(10d + (10 - u))) = 100d^2 + 10du + 100d + 10u - 10du - u^2$

$(10\,d + u)\,(10d + (10 - u))) = 100d^2 + 100d + 10u - u^2$

$(10\,d + u)\,(10d + (10 - u))) = 100d(d+1) + u(10-u)$

Exemple avec un nombre de 3 chiffres :

126 x 124 = 15624 (car 12x(12+1) = 156 et 6x4=24)

Exemples de nombres quelconques :

25	26	27	28	29
625	676	729	784	841

Par exemple :

$\mathbf{26^2 = 625 + 25 + 26}$

Donc

$\mathbf{26^2 = 676}$

Une autre exploitation
connaissant le carré de 40, retrouver le carré de 39 par soustraction :

39	40
1521	1600

Par exemple :
39^2 = 1600 - 40 - 39
Donc
39^2 = 1521

Principe : **$n^2 = (n+1)^2 - (n+1) - n$** .

Cubes

L'abaque suivant permet de calculer facilement les cubes des nombres entiers par des additions.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6n	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
	6	18	36	60	90	126	168	216	270	330
n^3	1	8	27	64	125	216	343	...	...	...

.Les deux premières lignes sont assez simples à suivre.
.Pour la troisième ligne voici trois exemples :
126 est obtenu en ajoutant **90** et **36** comme l'indique la flèche arrivant dessus ;
168 est **126 + 42** ; et enfin **330 = 270 + 60.**
.Pour la quatrième ligne on suit de même les flèches :
ainsi **2^3** (4ème ligne, 2ème colonne) c'est : **8 = 6 + 1 + 1**
4^3 c'est **64 = 36 + 27 + 1**
puis **7^3** c'est **343 = 126 + 216 + 1**

Pour les plus grands...
Une idée pour démontrer la validité de l'abaque ci-dessus : exprimer le terme de rang (n+1) de la suite U en fonction de n...

$$\begin{cases} v_n = 6n + v_{n-1} \\ u_{n+1} = u_n + v_n + 1 \end{cases} \begin{cases} v_1 = 6 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

Multiplications et Divisions

- **Multiplication par 5** : on **multiplie par 10** (facile) et on **divise par 2** (facile aussi). Exemple : 39×5 = 390 ÷ 2 = 195.

- **Division par 2** : Je sais pas si c'est moi ou si tout le monde fait ainsi, mais pour ça, **je décompose le nombre**. Ainsi pour diviser 396 par 2, je compte 396÷2 = (300+90+6)÷2 et là c'est très simple, ça fait 150+45+3 = 198.

- **Multiplication par 25**. On sait que 25, c'est 100/4. Donc on **multiplie par 100** et on **divise par 4**. Exemple : 128×25=12800/4 = (12000+800)÷4 = 3000+200 = 3200.

- **Multiplication par 11**. Celle ci, tout le monde la connait depuis le CP : un nombre à deux chiffres multiplié par 11 est ce nombre avec entre les deux chiffres, la somme des deux chiffres. Exemple : 11×13=1**4**3 car 4=1+3 (les 1 et 3 proviennent du 13). Un autre : 11×72=7**9**2.

  En parlant du 11, on voit une belle propriété :
  - $11^2 = 121$
  - $111^2 = 12\,\mathbf{3}21$
  - $1\,111^2 = 1\,23\mathbf{4}\,321$
  - $11\,111^2 = 123\,4\mathbf{5}4\,321$
  - …

- **Les carrés des nombres finissant par 5** (15^2, 25^2, 35^2, …) : on prend le nombre des dizaines du premier nombre que l'on multiplie par le nombre des dizaines du second augmenté de 1. Par exemple : 15×15 se calcul par 1×(1+1) que l'on met devant 25 soit 225. Un autre : 35×35 donne 3×(3+1) que l'on met devant 25 ce qui donne : 1225.
  Et ça marche aussi pour des nombres plus grands : 2005×2005 donne 200×201 que l'on met devant 25 soit : 4 020 025

- **Multiplication par 9** : on sait que 9 = 10-1. On **multiplie par 10 le nombre et on le soustrait une fois**. Ainsi 9×15 ça fait 150-15 = 135.

- **Le carré de n'importe quel nombre de 2 chiffres**. Là, je décompose avec l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2+b^2 + 2ab$.
  Ainsi 34^2 donne $30^2+4^2+4\times30\times2 = 900+16+240 = 1156$. Si vous ne connaissez par 30^2, faites $3^2\times100$:-).
  Bien entendu, tout ça se fait de tête, c'est bien plus rapide qu'avec la calculette.

- Celle ci, c'est pas vraiment une règle de calcul, mais une remarque.
  On voit que $13^2 = 169$. Maintenant, inversez les chiffres du 13, ce qui donne 31 et $31^2 = 961$, ce qui est 169 à l'envers. Ça marche avec **10**, **11**, **12** et **13**.
  De plus, si vous connaissez 13^2, alors vous n'aurez pas de mal à trouver 14^2, car il suffit d'inverser les deux derniers chiffres : $13^2=169$ et $14^2=196$.

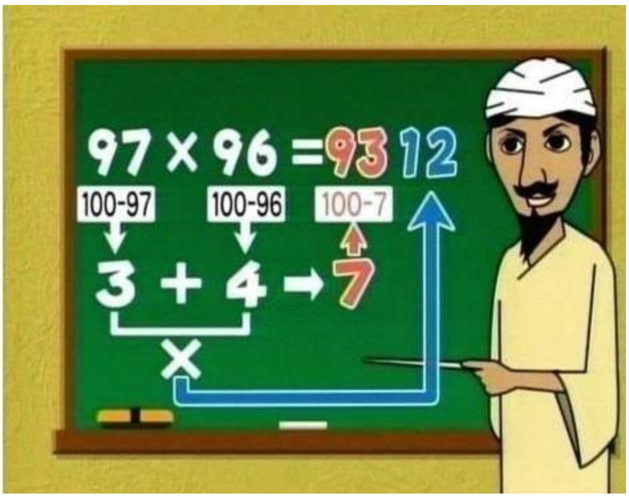
Additions

Je passerais sur le +9 qui vaut +10–1, mais je vous donne ma technique pour additionner des nombres plus grands, il ne faut **pas commencer par les unités**. Mais par l'autre coté. Par exemple, dans 351+512 je préfère calculer comme on prononce les nombres : **en commençant par les centaines**, puis les dizaines, puis les unités. ça donne 863.
Bien entendu, ici il n'y a pas de retenus, mais il faut les prendre en compte.

Dans les calculs de plus de deux termes, par commutativité, on regroupe ce qui donne des choses simples.
Ainsi 23+4+2+16+7+38 = (23+7)+(38+2)+(16+4) = 30+40+20 = 90. C'est connu mais très pratique.

Un autre truc vraiment tout bête, pour la soustraction : 34-56 = –(56–34). Je met le plus grand devant, c'est alors plus facile à calculer. Le résultat est simplement –22.

N'hésitez pas à faire plus de calcul, mais des calculs plus simples : 998+456 par exemple : on fait 1000+456–2 = 1 454… Ce genre de réflexe vient avec l'entrainement : vous arriverez peu à peu à repérer les simplifications à effectuer.



Les constante

Juste quelques valeurs comme ça, bien pratiques à savoir (plus rapide pour les calculs approchés) :

- **Pi** = π ≈3,1416
- **Phi** = ϕ ≈ 1,618 (le nombre d'or, donné par (1+racine(5))/2)
- **e** ≈ 2,718 (constant d'Euler, donné par exp(1))
- **racine(2)** ≈ 1,414
- **log(2)** ≈ 0,3. Pratique, parce que Log(4) devient 2Log(2)≈0,6 ou Log(20)≈1,3…

Conversions Angles

C'est pas tous les jours que l'on s'en sert, mais c'est bien utile aussi. Un angle exprimé en degré, par exemple 20,5° peut être exprimé sous la forme 20°30min. Où 1 degré, c'est 60 minutes. Pour aller vite, je dis que 1/10 de degré, c'est 6 minutes. De cette manière, 12,3° = 12°18'.

Et en binaire ?

Ok, là je m'égare, mais il y a quelques techniques pour convertir en binaire (puis en hexadécimal, par exemple pour la programmation ou les couleurs).
Il suffit de faire des soustractions successives en notant les puissances de deux qui apparaissent dans un nombre :
Exemple, dans 2013 : on trouve 1024, (reste 989), 512 (reste 477), 256 (reste 221), 128 (reste 93), 64 (reste 29), 16 (reste 13), 8 (reste 5), 4 et 1.
Autrement dit, 2013 en binaire, c'est 11111011101.

Pour le hexa, il faut le découper par groupe de 4 : 11111011101 devient 111-1101-1101, soit 7DD.
J'ai un tuto là sinon.

Conclusion

J'ai donné ici quelques règles simples que j'utilise presque tous les jours… Suffit de les connaitre, surtout pour la multiplication. Je vous avais aussi déjà donné ceci, une astuce pour multiplier rapidement et simplement de grands nombres.

Petite astuce qui simplifié la vie quand elle est applicable: pour le produit de nombres de même parité, passer par le carré de leur moyenne est parfois plus simple.

Genre 54 * 66 = (60-4)(60+4) = 3600 - 16 = 3584

Ça arrive quand même assez souvent.

Pour les carrés, j'utilise souvent la propriété $x^2 = (x - 1)^2 + (x - 1) + x$ (si, si, faîtes le calcul à partir de la décomposition de $(x - 1)^2$).
Par exemple, 31 * 31 = 30 * 30 + 30 + 31 = 900 + 30 + 31 = 961.
Et inversement 39 * 39 = 40 * 40 - 40 - 39 = 1600 - 40 - 39 = 1521.

De proche en proche, et en combinaisons avec d'autres techniques, ça aide...

C'est bien vrai et ça se comprend encore mieux avec l'

IMAGE

Soit $x^2 = (x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1$ idem $x^2 = (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1$
Ou . $x^2 = (x + 2)^2 - 4(x + 2) + 4$ idem $x^2 = (x - 2)^2 + 4(x - 2) + 4$
Et . $x^2 = (x + 3)^2 - 6(x + 3) + 9$ idem $x^2 = (x - 3)^2 + 6(x - 3) + 9$

Le hollandais volant (ci-dessus)

(homeomaths) en dessous

Identités remarquables de degré 3

- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Exemples d'application pour développer ou factoriser

$$(2x+5)^3 = (2x)^3 + 3\times(2x)^2\times 5 + 3\times(2x)\times 5^2 + 5^3$$
$$= 8x^3 + 15\times 4x^2 + 75\times 2x + 125$$
$$= 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$$
$$(2x-1)^3 = (2x)^3 - 3\times(2x)^2\times 1 + 3\times(2x)\times 1^2 - 1^3$$
$$= 8x^3 - 3\times 4x^2 + 3\times 2x - 1$$
$$= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$
$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$
$$27x^3 + 125 = (3x)^3 + 5^3 = (3x+5)(9x^2 - 15x + 25)$$

Pour comprendre cette identité remarquable, on peut construire un cube de côté (a + b) et exprimer de deux façons le volume du cube :